WYKŁAD 2 2014/15

RZĄD MACIERZY

POSTAĆ BAZOWA MACIERZY

Dowolną niezerową macierz A o wymiarach m *na* n za pomocą ciągu przekształceń elementarnych można sprowadzić do postaci

$$\left[\frac{I_r | C}{0}\right]_{m\times n}$$

zwanej ***bazową*** (***kanoniczną***).

W szczególności macierz bazowa może mieć postać:

$[I_r]$ dla $r = m = n$ $\quad\left[\frac{I_r}{0_{(m-r)xr}}\right]$ dla $r = n < m$ $\quad[I_r | C_{rx(n-r)}]$ dla $r = m < n$

Na przykład macierz w postaci bazowej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

można zapisać krótko $\left[\frac{I_3 | C_{3\times 2}}{0_{1\times 5}}\right]_{4\times 5}$ gdzie $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Uwaga

Macierz można sprowadzić do postaci bazowej na wiele sposobów. Postacie bazowe dla zadanej macierzy mogą różnić się między sobą tylko wyrazami macierzy resztowej C. Wymiary macierzy jednostkowej, zerowej i resztowej występujących w postaci bazowej nie zależą od wybranego ciągu przekształceń elementarnych.

DEF:
Rzędem niezerowej macierzy $\boldsymbol{A_{mxn}}$ nazywamy liczbę równą stopniowi macierzy jednostkowej występującej w jej postaci bazowej.
oznaczenie: rz$A$.

Dodatkowo przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy zeru.
Rząd macierzy jest równy maksymalnej liczbie różnych kolumn jednostkowych występujących w postaci bazowej macierzy.

WŁASNOŚĆ
Rząd macierzy A o wymiarach m na n jest nie większy od mniejszej z liczb m i n.

$$0 \le rzA \le \min(m,n).$$

Tw: Macierze równoważne mają równe rzędy.

Jeżeli A~B, to rz$A$=rz$B$.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

TWIERDZENIE KRONECKERA- CAPELLEGO

Układ *m* równań liniowych o *n* niewiadomych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej

$$rzA = rz[A|b]$$

przy czym

1. jeżeli $rzA = rz[A|b] = n$, to układ jest oznaczony;
2. jeżeli $rzA = rz[A|b] = r < n$, to układ jest nieoznaczony, posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

WNIOSEK

Jeżeli $rzA \neq rz[A|b]$, to układ jest sprzeczny.

Zauważmy, że gdy rząd macierzy współczynników jest różny od rzędu macierzy rozszerzonej, to

$$rz[A|b] = 1 + rzA.$$

Dla układu sprzecznego rząd macierzy współczynników jest o jeden mniejszy od rzędu macierzy rozszerzonej.

WYZNACZNIK MACIERZY KWADRATOWEJ

Wyznacznik macierzy kwadratowej *A* jest liczbą, którą oznaczamy symbolem det*A* lub $|A|$.

DEF: (indukcja ze względu na stopień macierzy tzn. obliczenie wyznacznika macierzy stopnia *n* wymaga obliczenia wyznacznika macierzy stopnia $n - 1$.

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej *A* stopnia *n* nazywamy **liczbę** zdefiniowaną poniżej:
1. Jeżeli $n = 1$, to $\det A = \det[a_{11}] = a_{11}$.
2. Jeżeli $n \geq 2$, to

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

gdzie A_{ij} jest liczbą równą iloczynowi $(-1)^{i+j}$ przez wyznacznik macierzy stopnia $n - 1$ powstałej z macierzy *A* przez wykreślenie *i*-tgo wiersza i j - tej kolumny.
Liczbę A_{ij} nazywamy d***opełnieniem algebraicznym*** elementu a_{ij}.

Zatem
1. W przypadku gdy $n = 1$, tzn. gdy macierz zawiera tylko jeden wyraz przyjmujemy, że wyznacznik jest wartością tego wyrazu.
2. W przypadku gdy $n \geq 2$ wyznacznik jest równy sumie wyrazów pierwszego wiersza pomnożonych przez dopełnienia algebraiczne tych wyrazów.

TW: LAPLACE'A (rozwinięcie wyznacznika względem dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny)

Dla każdego i, $1 \leq i \leq n$ zachodzi równość

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} .$$

Dla każdego $j,\ 1 \le j \le n$ zachodzi równość

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} .$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy sumie wyrazów dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny pomnożonych przez dopełnienia algebraiczne tych wyrazów.

WŁASNOŚCI WYZNACZNIKÓW

1. $\det A = \det A^T$

2. Jeżeli każdy element pewnego wiersza lub kolumny macierzy jest równy zero, to wyznacznik tej macierzy jest równy zero.

3. Jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn, to

$$\det A = -\det B .$$

4. Jeżeli dwa wiersze macierzy lub dwie kolumny są proporcjonalne (w szczególności identyczne), to wyznacznik tej macierzy jest równy zero.

5. Jeżeli elementy pewnego wiersza lub pewnej kolumny mają wspólny czynnik, to można go wyciągnąć przed wyznacznik.

Np. $\lambda \in R$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6'. Jeżeli do elementów wiersza macierzy dodamy odpowiednie elementy innego wiersza pomnożone przez dowolną liczbę, to wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie.
6". Jeżeli do elementów kolumny macierzy dodamy odpowiednie elementy innej kolumny pomnożone przez dowolną liczbę, to wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie.

7. Jeżeli w macierzy wszystkie elementy znajdujące się pod przekątną główną są równe zeru, to wyznacznik tej macierzy jest równy iloczynowi elementów głównej przekątnej.

DEF:
Macierz kwadratową A nazywamy:
osobliwą, gdy det$A$=0
nieosobliwą, gdy det$A\neq 0$.

UKŁAD CRAMERA

Układ równań liniowych nazywamy ***układem Cramera*** jeżeli liczba równań układu jest równa liczbie niewiadomych (m=n) i macierz współczynników układu A jest nieosobliwa (det$A\neq 0$).

TWIERDZENIE CRAMERA
Układ Cramera (m=n, det$A\neq 0$) ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami

$$x_i = \frac{W_i}{W} \qquad 1 \le i \le n$$

gdzie $W = \det A$, W_i i=1,2,...,n jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Zadanie 1 Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań .Wyznaczyć rzędy macierzy współczynników i macierzy rozszerzonej.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 \quad + 3x_4 - 5x_5 = -7 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \quad = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \quad = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

Zadanie 2

Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ rozwijając go a) względem 2-go wiersza, b) 2-ej kolumny.

Zadanie 3 Obliczyć wyznaczniki korzystając z własności

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 4 Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy, korzystać z własności wyznaczników

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, f) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

odp:

zad.1 a) $\begin{cases} x_1 = 2z + 3t + s - 1 \\ x_2 = z - t + 2s + 3 \\ x_3 = z \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$ $rzA = rz[A|b] = 2$, **b)** $\begin{cases} x_1 = 2 - t + 3s \\ x_2 = -1 + 2t + s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$ $rzA = rz[A|b] = 2$.

Sprawdź samodzielnie poprawność odpowiedzi uzyskanych w przykładach c), d) ,e).

zad.2 $\det A = 54$. **zad.3** –85, -24, 30, $2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 5 = 120$.

zad.4 b) 9, c) 30; d) 10; e) 4; f) 12.